Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
1. Klausur

1. Mai 2024

Zone A Nachmittag | **Zone B** Nachmittag | **Zone C** Nachmittag

Prüfungsnummer des Kandidaten

2 Stunden

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur dürfen Sie keinen Taschenrechner nutzen.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Antworthefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze LS** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.

2224 – 9715

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 4]

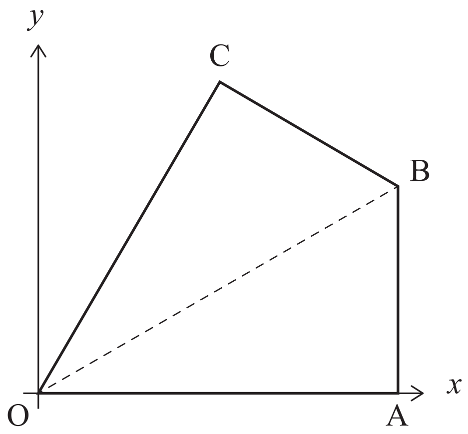
Lösen Sie $\tan(2x - 5°) = 1$ für $0° \leq x \leq 180°$.

2. [Maximale Punktzahl: 5]

Lösen Sie $3 \times 9^x + 5 \times 3^x - 2 = 0$.

3. [Maximale Punktzahl: 7]

Im folgenden Koordinatensystem ist das Viereck OABC dargestellt.



OABC ist symmetrisch zur Achse $[\mathrm{OB}]$.

A hat die Koordinaten $(6,\ 0)$ und C hat die Koordinaten $\left(3,\ 3\sqrt{3}\right)$.

(a) (i) Notieren Sie die Koordinaten des Mittelpunkts von $[\mathrm{AC}]$.

(ii) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit oder mittels einer anderen Methode, die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte O und B verläuft. [4]

(b) Unter der Voraussetzung, dass $[\mathrm{OA}]$ senkrecht zu $[\mathrm{AB}]$ verläuft, finden Sie den Flächeninhalt des Vierecks OABC. [3]

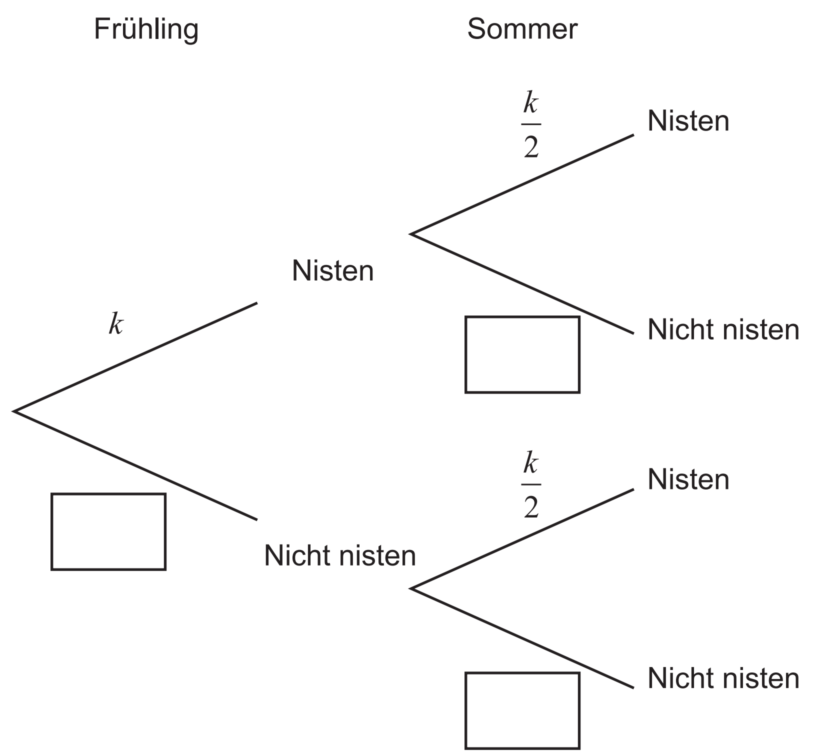
4. [Maximale Punktzahl: 6]

Eine Vogelart kann in den zwei Jahreszeiten Frühling und Sommer nisten.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sie im Frühling nistet, beträgt k.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sie im Sommer nistet, beträgt $\frac{k}{2}$.

Dies ist im folgenden Baumdiagramm dargestellt.



(a) Vervollständigen Sie das Baumdiagramm mit den Wahrscheinlichkeiten, dass die Vögel in der jeweiligen Jahreszeit nicht nisten. Notieren Sie Ihre Antworten abhängig von k. [2]

Es ist bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Vögel weder im Frühjahr noch im Sommer nisten, $\frac{5}{9}$ beträgt.

(b) (i) Zeigen Sie, dass $9k^2 - 27k + 8 = 0$.

(ii) Sowohl $k = \frac{1}{3}$ als auch $k = \frac{8}{3}$ erfüllen die Gleichung $9k^2 - 27k + 8 = 0$.

Geben Sie an, warum $k = \frac{1}{3}$ die einzig gültige Lösung ist. [4]

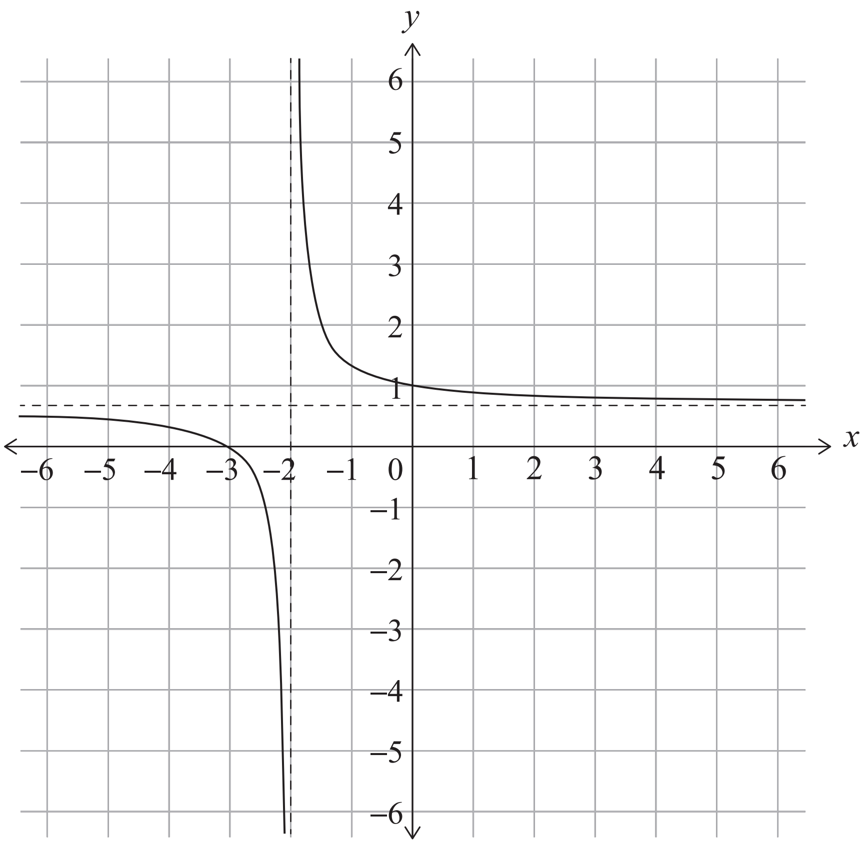
(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 4)

5. [Maximale Punktzahl: 8]

Eine Funktion f ist definiert durch $f\left(x\right)=\dfrac{2\left(x+3\right)}{3\left(x+2\right)}$, mit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -2$.

Der Graph $y = f(x)$ ist im folgenden Diagramm dargestellt.



(a) Notieren Sie die Gleichung der horizontalen Asymptote. [1]

Betrachten Sie $g(x) = mx + 1$, mit $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$.

(b) (i) Notieren Sie die Anzahl der Lösungen von $f(x) = g(x)$ für $m > 0$.

(ii) Bestimmen Sie den Wert von m so, dass $f(x) = g(x)$ nur eine Lösung in x besitzt.

(iii) Bestimmen Sie den Bereich der Werte für m, für die $f(x) = g(x)$ zwei Lösungen mit $x \geq 0$ besitzt. [7]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 5)

6. [Maximale Punktzahl: 5]

Ein Bauer baut zwei Arten von Äpfeln an, nämlich Kochäpfel und Essäpfel. Das Gewicht der Äpfel in Gramm kann jeweils als Normalverteilung mit den folgenden Parametern modelliert werden.

Apfelart	**Durchschnittswert μ**	**Standardabweichung σ**
Essäpfel	$100\,\text{g}$	$20\,\text{g}$
Kochäpfel	$140\,\text{g}$	$40\,\text{g}$

Bei beiden Apfelsorten können Sie davon ausgehen, dass das Gewicht von $95\,\%$ der Äpfel innerhalb von zwei Standardabweichungen vom Mittelwert liegt.

(a) Finden Sie den Prozentsatz der Essäpfel, die mehr als $140\,\text{g}$ wiegen. [1]

Der Landwirt baut eine große Anzahl von Äpfeln an, von denen $80\,\%$ Essäpfel sind.

Beide Apfelsorten werden gepflückt und in einer Reinigungsmaschine zufällig miteinander vermischt.

Nach der Reinigung sortiert die Maschine diejenigen mit einem Gewicht von mehr als $140\,\text{g}$ in einen Behälter aus.

(b) Ein Apfel wird zufällig aus dem Behälter ausgewählt. Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Essapfel handelt. Geben Sie Ihre Antwort in der Form $\frac{c}{d}$, mit $c, d \in \mathbb{Z}^{+}$. [4]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

7. [Maximale Punktzahl: 7]

Eine Funktion $g(x)$ ist definiert durch $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + dx - e$, mit $d, e \in \mathbb{R}$.

α, β und γ sind die drei Lösungen der Gleichung $g(x) = 0$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(a) Notieren Sie den Wert von $\alpha + \beta + \gamma$. [1]

Eine Funktion $h(z)$ ist definiert durch $h(z) = 2z^5 - 11z^4 + rz^3 + sz^2 + tz - 20$, mit $r, s, t \in \mathbb{R}$.

α, β und γ sind auch die Lösungen der Gleichung $h(z) = 0$.

Es ist bekannt, dass $h(z) = 0$ für die komplexe Zahl $z = p + 3\mathrm{i}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $p = 1$ gilt. [3]

Nun gelte $h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, und $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha < \beta$ und $\gamma \in \mathbb{Q}$.

(c) (i) Finden Sie den Wert des Produkts $\alpha\beta$.

(ii) Notieren Sie die Werte von α und β. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. [Maximale Punktzahl: 6]

Finden Sie mit Hilfe der Regel von de L'Hospital $\lim_{x\to 0} \frac{\sec^4 x - \cos^2 x}{x^4 - x^2}$.

9. [Maximale Punktzahl: 7]

Ein Lehrer geht mit n Schülern auf eine Exkursion. Die Schüler werden nach dem Zufallsprinzip in zwei Gruppen eingeteilt.

Aus Sicherheitsgründen müssen sich genau drei Schüler in der ersten Gruppe und mindestens drei Schüler in der zweiten Gruppe befinden.

Der Lehrer teilt drei Schüler nach dem Zufallsprinzip in die erste Gruppe und die anderen Schüler in die zweite Gruppe ein.

(a) Notieren Sie einen Ausdruck für die Anzahl der Möglichkeiten, wie die Schüler eingeteilt werden können. [1]

Zwei der Schüler bitten den Lehrer, nicht in dieselbe Gruppe zu kommen.

Der Lehrer stimmt zu und stellt nun fest, dass sich die Anzahl der Möglichkeiten für die Einteilung der Schüler halbiert hat.

(b) Bestimmen Sie den Wert von n. [6]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

10. [Maximale Punktzahl: 16]

Betrachten Sie die arithmetische Folge a, p, $q\ldots$, mit a, p, $q \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $2p - q = a$ gilt. [2]

Betrachten Sie die geometrische Folge a, s, $t\ldots$, mit a, s, $t \neq 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $s^2 = at$ gilt. [2]

Der erste Term der beiden Folgen ist a.

Es gelte $q = t = 1$.

(c) Zeigen Sie, dass $p > \dfrac{1}{2}$. [2]

Betrachten Sie den Fall für $a = 9$, $s > 0$ und $q = t = 1$.

(d) Notieren Sie die ersten vier Terme der

(i) der arithmetischen Folge;

(ii) der geometrischen Folge. [4]

Aus der arithmetischen und geometrischen Folge wird eine neue arithmetische Folge u_n gebildet.

Die ersten drei Terme von u_n sind $u_1 = 9 + \ln 9$, $u_2 = 5 + \ln 3$, und $u_3 = 1 + \ln 1$.

(e) (i) Finden Sie die gemeinsame Differenz der neuen Folge in Abhängigkeit von $\ln 3$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\sum_{i=1}^{10} u_i = -90 - 25\ln 3$ gilt. [6]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

11. [Maximale Punktzahl: 19]

Die Ebene Π_1 hat die Gleichung $2x + 6y - 2z = 5$.

(a) Verifizieren Sie, dass der Punkt $\mathrm{A}\left(2, \frac{1}{2}, 1\right)$ auf der Ebene Π_1 liegt. [1]

Die Ebene Π_2 ist gegeben durch $(k^2 - 6)x + (2k + 3)y + pz = q$, mit p, q, $k \in \mathbb{R}$ und $p \neq 0$.

(b) Für $p = -6$ ist Π_2 senkrecht zu Π_1 und A liegt auf Π_2.
Finden Sie die Werte von k und q. [5]

Für die Teile (c), (d) und (e) gilt nun, dass für $k = 3$ Π_2 parallel zu Π_1 ist.

(c) Bestimmen Sie den Wert von p. [2]

Es gilt nun auch $q = -\frac{51}{2}$.

Die Senkrechte auf Π_1 durch Punkt A schneidet Π_2 im Punkt B.

(d) (i) Finden Sie die Koordinaten von B.

(ii) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit, dass der senkrechte Abstand zwischen Π_1 und Π_2 $\sqrt{11}$ beträgt. [7]

(e) Finden Sie die Gleichung einer dritten parallelen Ebene Π_3 deren senkrechter Abstand von Π_1 ebenfalls $\sqrt{11}$ beträgt. [4]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

12. [Maximale Punktzahl: 20]

(a) Es sei $f(x)=(1-ax)^{-\frac{1}{2}}$, mit $ax<1$ und $a\neq 0$.

Die n-te Ableitung von $f(x)$ wird als $f^{(n)}(x)$, $n\in\mathbb{Z}^{+}$ geschrieben.

Beweisen Sie durch vollständige Induktion,

dass $f^{(n)}(x)=\dfrac{a^{n}(2n-1)!(1-ax)^{-\frac{2n+1}{2}}}{2^{2n-1}(n-1)!}$, $n\in\mathbb{Z}^{+}$. [8]

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von Teil (a) oder auf andere Weise, dass die Maclaurinsche Reihe für $f(x)=(1-ax)^{-\frac{1}{2}}$ bis einschließlich dem x^2-Term $1+\dfrac{1}{2}ax+\dfrac{3}{8}a^{2}x^{2}$ ist. [2]

(c) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit, dass $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}(1-4x)^{-\frac{1}{2}}\approx\dfrac{2+6x+19x^{2}}{2}$. [4]

(d) Die Reihenentwicklung von $(1-ax)^{-\frac{1}{2}}$ sei für $|ax|<1$, konvergent. Geben Sie unter dieser Voraussetzung die Einschränkung an, die für x gelten muss, damit die Näherung $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}(1-4x)^{-\frac{1}{2}}\approx\dfrac{2+6x+19x^{2}}{2}$ gültig ist. [1]

(e) Bestimmen Sie mit Hilfe von $x=\dfrac{1}{10}$ einen Näherungswert für $\sqrt{3}$.

Geben Sie Ihre Antwort in der Form $\dfrac{c}{d}$ an, mit $c,\ d\in\mathbb{Z}^{+}$. [5]
